DÉDUCTION STATISTIQUE

DE LA

LOI DE DISTRIBUTION DE PLANCK [1] 20.

PAR RAMÓN G. LOYARTE
Docteur en physique

RÉSUMÉ

Déduction statistique de la loi de distribution de Planck. — La loi de distribution de Planck relative a l'énergie dans le spectre, peut être obtenue en s'appuyant sur une formule statistique de l'énergie libre, et sur l'hypothèse des «quantas» de lumière. Broglie et Bose ont ainsi fait leurs déductions statistiques. L'auteur procède d'une façon entièrement différente de celle de Bose : le nombre de «quantas» de lumière distribués dans les céllules élémentaires d'extension h^3, contenues dans un intervalle $d\nu$, a une température donnée, se déduit de la loi de distribution de l'énergie en divisant par $h\nu$.

La méthode suivie por Planck pour déduire sa loi de distribution de l'énergie dans le spectre, s'appuie, comme l'on sait, sur les lois de l'électromagnétisme en supposant que l'acte de l'émission est accompagné de variations discontinues de la coordonnée et de la vitesse de l'oscillateur. Cette loi de Planck décrit, très exactement, le phénomène en question, ce que ne pouvaient faire les autres lois basées sur la mécanique classique, et, au surplus, elle admet comme loi limite celle de Wien et comme loi intégrale celle de Stefan Boltzmann.

(1) Version, par C. C. D., de l'étude presentée a l'Académie Nationale des Sciences Exactes, Physiques et Naturelles de Buenos Aires, le 22 juin 1925, l'auteur étant récipiendaire. Cet article a été publié en langue espagnole dans *Contribución al estudio de las ciencias físicas y matemáticas, Revista de la Universidad de La Plata* (vol. III; 6e livraison; nº 71, page 491; mars 1926).

Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Tomo I (1928)

L'hypothèse quantiste qu'il a introduit, est d'une extraordinaire fécondité, mais la façon dont il a déduit sa loi n'est pas a l'abri de certaines objections. D'après Debye (1), le point faible de la déduction de Planck consiste en ceci : On commence par établir une forme de l'énergie de l'oscillateur au moyen d'une relation entre sa valeur moyenne et l'énergie moyenne de la radiation, puis on introduit l'hypothèse des «quantas» élémentaires de l'énergie, hypothèse qui n'est nullement liée a l'expression de l'énergie de l'oscillateur que l'on avait d'abord supposée.

Debye déduit ensuite la loi en question en se basant sur l'hypothèse des «quantas» comme unique qualité connue de l'oscillateur, et sur la mécanique statistique. Mais sa déduction s'appuie aussi, en réalité, sur les lois de d'électromagnétisme.

L. de Broglie (2) a, le premier, obtenu quelques uns des résultats connus de la théorie de la radiation — et, entre autres, la loi de Wien — en raisonnant, uniquement, sur les bases de la théorie cinétique et sur les «quanta», c'est-à-dire, sans faire intervenir l'électromagnétisme. Il déduit la susdite loi de Wien au moyen de la formule de l'énergie libre

$$F = -kNT \log \sum_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{kT}}$$

qui se déduit, a son tour, de la formule de Boltzmann appliquée a un sistème isolé en équilibre. Conformément avec la mécanique classique, il suppose que le «quanta» $h\nu$ de lumière, a une impulsion $h\nu : c$, dans la direction de son mouvement. Le système, à six dimentions, déterminé par les coordonnées et les impulsions, c'est-à-dire, le système des phases, est décomposé en domaines élémentaires d'extensión h^3, ainsi que l'on a été obligé de le faire pour le calcul de la constante chimique.

Bose (3) dans une étude récente, déduit la loi de Planck en suivant une méthode très semblable a celle de de Broglie que nous venons d'ébaucher. Il commence par calculer le nombre de domaines élémentaires d'extension h^3 contenus dans une région de l'espace des phases

(1) P. DEBYE, *Der Wahrscheinlichkelisbegriff in der Theorie der Straklung, Annalen der Physik,* tome XXXIII, page 1427, 1910.

(2) LOUIS DE BROGLIE, *Rayonnement noir et quantas de lumière. Le Journal de Physique,* tome III, serie IV, page 422, 1922.

(3) BOSE (Dacca University India), *Planck's Gesetz und Licht quanten hypothese Zeitschrift für Physik,* tome XXVI, 3e cahier, page 178, août 1924.

telle que les coordonnées et les impulsions soient comprises entre x $x + dx$, y et $y + dy$, z et $z + dz$, p_x et $p_x + dp_x$, p_y et $p_y + dp_y$, p_z et $p_z + dp_z$, (p_x, p_y, p_z étant les composantes de l'impulsion). On a $p = h\nu : c$. Il détermine ensuite le nombre N_s des «quantas» de lumière de fréquence s (s étant quelconque) que l'on doit supposer être distribués dans ces domaines de telle sorte que l'énergie totale E_s satisfasse a la relation

$$E = V \int \rho_\nu d\nu = \sum_s N_s h\nu_s \qquad (1)$$

ρ_ν étant la densité de l'énergie de fréquence ν, et V le volume.

Dans ce qui suit nous déduirons la loi de distribution, en opérant sur un nombre indéterminé de «quantas» de lumière, et nous calculerons ensuite ce nombre en divisant par $h\nu_s$, après avoir fait une décomposition spectrale.

Supposons, donc, que N soit le nombre de céllules élémentaires d'extension h^3 comprises dans l'espace de coordonnées et d'impulsions limité de la façon que nous avons indiqué plus haut. Les «quantas» de lumière sont distribués entre ces céllules, leur nombre étant encore inconnu.

A un moment donné il y aura N_0 céllules vides, N_1 contenant un «quanta de lumière, N_2 contenant deux «quantas», et ainsi de suite. Le nombre de manières dont cette distribution peut être realisée, c'est-à-dire sa probabilité, est exprimé par la formule :

$$P = \frac{N\,!}{N_0\,!\,N_1\,!\,N_2\,!\,\ldots}. \qquad (2)$$

L'entropie, d'après la formule de Boltzmann, est :

$$S = k \log N\,! - k\Sigma \log N_i\,!. \qquad (3)$$

Si l'on fait,

$$\omega_i = \frac{N_i}{N}$$

et si l'on tient compte que N_i et N sont de très grands nombres, on peut établir

$$\log N_i\,! = N_i \log N_i - N_i$$

et la formule (3) se transforme, après quelques calculs (1) en

$$S = -kN\Sigma\omega_i \log \omega_i, \qquad (4)$$

(1) Voir : M. PLANCK, *Theorie der Wärmestrahlung*, 4e édition, page 126 ; R. G. LOYARTE, *La hipótesis de los «quanta» en la teoría estadística de la materia*, etc., *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, 1923.

L'énergie totale du système est

$$E = N_1\bar{\varepsilon}_1 + N_2\bar{\varepsilon}_2 + N_3\bar{\varepsilon}_3 + \dots$$

$\bar{\varepsilon}_1$ étant evidemment $h\nu$; $\bar{\varepsilon}_2 = 2h\nu$, etc.; ou bien :

$$E = N\left(\omega_1\bar{\varepsilon}_1 + \overline{\omega_2\varepsilon_2} + \dots\right) = N\Sigma\omega_i\varepsilon_i. \tag{5}$$

Du moment qu'il faut admettre que le corps radiant constitue un système isolé, on doit avoir :

$$E = \text{const.}$$

c'est-à-dire

$$\delta E = N\delta\Sigma\omega_i\varepsilon_i = 0 \tag{6}$$

et pour exprimer l'état d'équilibre

$$\delta S = -kN\delta\Sigma\omega_i \log\omega_i = 0. \tag{7}$$

Par définition on a aussi :

$$\Sigma\omega_i = 1,$$

par conséquent :

$$\delta\Sigma\omega_i = 0. \tag{8}$$

En combinant la condition fondamentale (7) avec les accesoires (6) et (8), on obtient l'entropie du système exprimé sous la forme bien connue :

$$S = kN\log\Sigma e^{-\frac{\bar{\varepsilon}_i}{kT}} + \frac{E}{T}.$$

Conséquemment, l'énergie libre du système est donnée par

$$F = E - TS = -kNT\log\sum_i e^{-\frac{\bar{\varepsilon}_i}{kT}}. \tag{9}$$

Mais ε_i a, pour valeur, d'après l'hypothèse que l'on a fait,

$$\varepsilon_i = nh\nu \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

de sorte que l'on a comme somme

$$\sum_n^{0\infty} e^{-\frac{nh\nu}{kT}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \tag{10}$$

et (9) se transforme en

$$F = kN\log\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right). \tag{11}$$

L'énergie est exprimée par le formule thermodynamique

$$E = F - T\frac{\partial F}{\partial T}$$

et l'égalité (11) permet d'écrire

$$E = N\nu h \frac{1}{e^{-\frac{\nu h}{kT}} - 1}. \tag{12}$$

Or, d'aprés ce qui a été dit, N est exprimé par

$$\frac{1}{h^3}\int dxdydzdp_xdp_ydp_z = 4\pi\frac{\nu^2}{c^3}\,V d\nu$$

car p_x, p_y, p_z sont les composantes d'une quelconque des impulsions de grandeur $p = \frac{h\nu}{c}$, de sorte que les éléments de volume d'extension dp_x, dp_y, dp_3 constituent le volume compris entre les sphères de rayons:

$$\frac{h\nu}{c} \quad \text{et} \quad \frac{h}{c}(\nu + d\nu)$$

soit :

$$4\pi^2\frac{h^2\nu^2}{c^2}\frac{h}{c}\,d\nu.$$

Si l'on remplace, dans (12), N par 2N (afin de tenir ainsi compte de la polarisation), on obtient, pour l'énergie

$$E = \frac{8\pi h\nu_s{}^3}{c^3}\,V\frac{1}{e^{\frac{\nu_s h}{kT}} - 1}\,d\nu_s \tag{13}$$

expression equivalente à celle de la loi de Planck.

Le nombre N_s de « quantas » de lumière qui se trouvent distribués dans l'intervalle dV_s est, conséquemment,

$$N_s = \frac{E}{h\nu_s} = \frac{8\pi\nu_s{}^2}{c^3}\,V\frac{1}{e^{\frac{\nu h}{kT}} - 1}\,d\nu_s.$$

La Plata, juin 1925.